523.4
Eu53m

MÉMOIRE

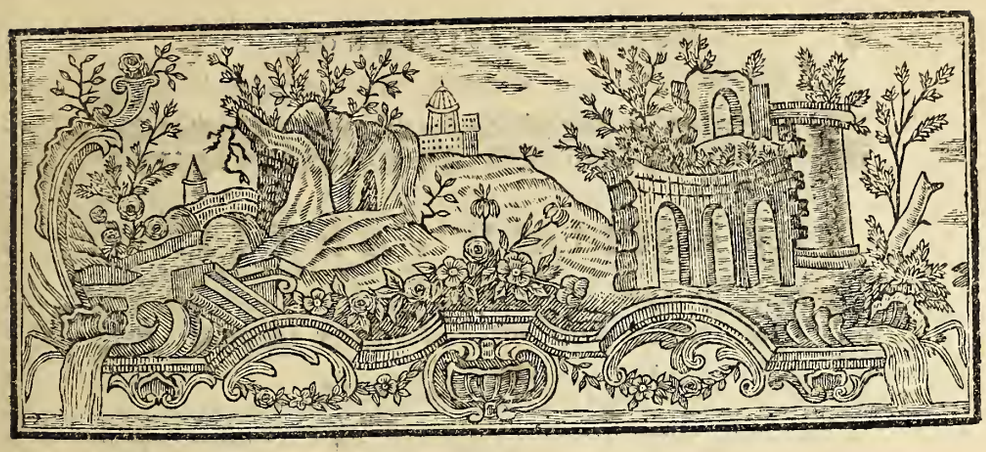
DANS LEQUEL ON EXAMINE

Si les Planetes ſe meuvent dans un milieu dont la réſiſtance produiſe quelque effet ſenſible ſur leur mouvement ?

Compoſé à l'occaſion du Prix de M. DCC. LXII.

Par M. JEAN ALBERT EULER, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe.

Hæc ſuper impoſuit liquidum & gravitate carentem
Æthera nec quicquam terrenæ facis habentem.
OVID.



MÉMOIRE

DANS LEQUEL ON EXAMINE

Si les Planetes ſe meuvent dans un milieu dont la réſiſtance produiſe quelque effet ſenſible ſur leur mouvement?

POUR répondre à cette queſtion, il y a trois choſes à examiner.

Premierement: Quelle eſt la nature du milieu dans lequel les Planetes ſe meuvent?

En ſecond lieu: Il faut rechercher ſi ce milieu eſt capable de cauſer quelque altération dans le mouvement des Planetes?

Et enfin: Il faut déterminer, par le calcul, tous les dérangemens qui ſont en effet cauſés par cette réſiſtance dans le mouvement des Planetes?

PREMIERE PARTIE.

Sur la nature du milieu dans lequel les Planetes ſe meuvent.

I.

D'ABORD, on ne ſauroit ſoutenir que l'eſpace dans lequel les planetes ſe meuvent ſoit un vuide parfait. Outre tant d'autres raiſons, la ſeule lumiere prouve ſuffiſamment, que tout l'eſpace du ciel eſt rempli de cette matiere ſubtile dont les rayons de lumiere ſont formés. Si les rayons de lumiere étoient des émanations actuelles des corps luiſans, lancées avec cette prodigieuſe vîteſſe qui leur fait parcourir l'eſpace immenſe du ſoleil juſqu'à nous en moins de huit minutes de tems, tout l'eſpace du ciel ſeroit rempli de ces émanations lumineuſes qui le traverſeroient preſque en tout ſens avec la même rapidité. Mais quoique le grand Newton ait ſoutenu ce ſentiment, il eſt aſſujetti à tant d'inconvéniens, qu'il me ſera permis de l'abandonner & d'embraſſer l'autre ſentiment, qui explique la propagation de la lumiere d'une maniere ſemblable à celle du ſon.

II.

Sans parler de l'épuiſement que les corps luiſans devroient ſouffrir, ſuivant le ſentiment de Newton, le

ſeul phénomene, que pluſieurs rayons de lumiere paſſent ſans ſe troubler par le même point, le détruit tout-à-fait. Il eſt contre les principes les mieux établis de la Mécanique, que pluſieurs particules, quelques ſubtiles qu'on les conçoive, paſſent à la fois par le même point & en tout ſens avec une vîteſſe auſſi prodigieuſe que celle de la lumiere, ſans ſe choquer & troubler le mouvement les unes les autres. Or dans l'autre ſiſtême, nous ſavons non-ſeulement par l'expérience, que pluſieurs ſons traverſent le même point ſans ſe troubler; mais M. de la Grange a fait voir très-clairement, dans les Mémoires de la Société de Turin, que ce phénomene eſt parfaitement d'accord avec les principes de Mécanique, & qu'il en eſt même une ſuite néceſſaire.

III.

Il eſt donc certain, que la lumiere eſt produite par les corps luiſans de la même maniere que le ſon eſt produit par les corps ſonores, & que la propagation dans l'un & l'autre cas ſuit les mêmes loix. Il faut donc que tout l'eſpace des cieux ſoit rempli d'une matiere propre à tranſmettre les petites impulſions ou ébranlemens qui conſtituent la nature de la lumiere, tout comme nous ſavons à préſent, par les heureuſes recherches de M. de la Grange, que le ſon eſt tranſmis par l'air. De-là il s'enſuit que cette matiere céleſte doit être fluide & ſemblable à l'air, en joignant à un certain degré de denſité un certain degré d'élaſticité, pour produire à la propagation de la lumiere la même vîteſſe que l'expérience nous donne à connoître.

IV.

Or puiſque la vîteſſe de la lumiere eſt connue, étant environ ſix cent mille fois plus grande que celle du

ſon, nous en pouvons conclure un beau rapport entre ce milieu du ciel & notre air. Sachant que la vîteſſe des ébranlemens tranſmis par un milieu élaſtique eſt comme la racine quarrée de l'élaſticité diviſée par la denſité, ſi nous poſons l'élaſticité du milieu des cieux m fois plus grande que celle de l'air, & ſa denſité n fois plus petite que celle de l'air, nous aurons $\sqrt{mn} = 600000$, ou bien $mn = 360\,000\,000\,000$. Et partant, ſi nous ſavions l'élaſticité de ce milieu, nous en pourrions conclure ſa denſité, & réciproquement; par exemple, ſi ſon élaſticité étoit 600 000 fois plus grande que celle de l'air, ſa denſité ſeroit préciſément d'autant de fois plus petite.

V.

Qu'il me ſoit permis de donner à ce milieu le nom d'*Ether*, qui eſt donc une matiere fluide & élaſtique ſemblable à l'air, mais qui en differe tant par ſa denſité que par ſon élaſticité; & quoique nous ne ſachions ni l'une ni l'autre ſéparément, nous connoiſſons que, poſant l'élaſticité de l'éther m fois plus grande & ſa denſité n fois plus petite que celle de l'air, le produit de ces deux nombres mn doit être 360 000 000 000. Il n'y a donc aucun doute que l'un & l'autre de ces deux nombres ne ſoit très-grand. Puiſque l'air, en montant, devient de plus en plus rare, & qu'il ſe perd enfin dans l'éther, il faut bien que l'éther ſoit incomparablement plus rare que l'air, & ſi l'élaſticité de l'éther eſt la cauſe de la cohéſion, dureté & du reſſort des corps terreſtres, comme il paroît très-vraiſemblable, il faut bien que ſon élaſticité ſoit pour le moins 1000 fois plus grande que celle de l'air. Or, ſuppoſant $m = 1000$, la denſité de l'éther ſeroit 360 000 000 fois plus petite que celle de l'air; & ſi l'on ne ſuppoſpit l'élaſticité que 100 fois plus grande que celle de

l'air, la denſité de l'éther deviendroit encore dix fois plus petite.

VI.

Puiſque nous ſommes aſſurés que les planetes & cometes ne ſouffrent preſque aucune réſiſtance dans leur mouvement par l'éther, il faut abſolument que cette matiere ou l'éther ſoit pluſieurs mille fois plus rare que l'air, ce qui s'accorde parfaitement bien avec ce que la vîteſſe de la lumiere nous vient de fournir. Donc un pied cubique d'éther renfermeroit pluſieurs mille fois moins de matiere qu'un pied cubique d'air; & puiſque l'air eſt 800 fois plus léger que l'eau, & celle-ci 19 fois plus légere que l'or, ſi nous ſuppoſons l'éther 360 000 000 fois plus rare que l'air, un pied cubique d'éther contiendra $19 \times 800 \times 360\,000\,000$ moins de matiere qu'un pied cubique d'or; ou bien, un pied cubique d'or contiendroit autant de matiere que 5 472 000 000 000 pieds cubiques d'éther; ou encore, qu'un cube d'éther dont le côté ſeroit de 17500 pieds, c'eſt-à-dire à-peu-près d'une lieue de France.

VII.

Ici il ſe préſente d'abord une queſtion très-importante: S'il ſeroit poſſible de diviſer & ſubtiliſer la matiere d'un pied cubique d'or, enſorte qu'elle rempliſſe tout l'eſpace d'une lieue cubique? Je ſais bien que Keil a prétendu en avoir démontré la poſſibilité, ayant prouvé que les intervalles entre les particules pourroient devenir moindres qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle fût; mais l'élaſticité ſemble abſolument exiger que les moindres particules ſe touchent tout-à-fait, & qu'elles ſe trouvent dans une continuité dont il s'en faut beaucoup que Keil ait démontré la poſſibilité, à

moins qu'on ne veuille donner aux particules une figure linéaire presque géométrique, qui ne se touchent que par les pointes; mais une telle structure seroit trop révoltante pour en parler sérieusement dans la Physique. Je crois plutôt qu'on peut hardiment nier qu'il soit possible de former une lieue cubique d'éther d'un pied cubique d'or, par la subtilisation, quoique la quantité de matiere soit de part & d'autre la même. Il y a ici un équivoque qui semble avoir trompé tous ceux qui ont écrit sur cette matiere.

VIII.

Pour mettre cette matiere dans tout son jour, je commence par une remarque générale, que dans tous les corps il faut bien distinguer *leur véritable étendue* de la *masse* ou *quantité de matiere* dont ils sont composés. Or je nomme *la véritable étendue* d'un corps le volume ou la solidité géométrique, qui resteroit, si l'on retranchoit de son volume apparent tous les pores dont il est rempli. On sait que l'or même est tout rempli de pores: donc la véritable étendue d'une masse d'or sera toujours beaucoup plus petite que son volume apparent. Cette véritable étendue de chaque corps est une quantité géométrique, & partant bien différente de la quantité de matiere ou de la masse, qui est une quantité mécanique, en vertu de laquelle les corps s'opposent au changement de leur état; c'est donc *l'inertie*, & ces termes, *quantité de matiere*, *masse* & *inertie* signifient la même chose.

IX.

Les expériences sur la gravité prouvent suffisamment, que le poids de chaque corps est proportionnel

à

à ſa maſſe ou à ſon inertie. Donc puiſque un pied cubique d'or eſt 19 fois plus peſant qu'un pied cubique d'eau, il eſt certain que celui-là contient 19 fois plus de matiere que celui-ci; mais il ne s'enſuit pas que la véritable étendue de l'or ſoit 19 fois plus grande que la véritable étendue de l'eau; ou bien qu'il ſeroit poſſible de réduire une maſſe d'eau en en ôtant tous les pores à un volume plus que 19 fois plus petit. Il n'eſt pas encore prouvé que deux corps, dont les maſſes ſont égales, aient auſſi la même véritable étendue; & je ne vois nulle néceſſité pourquoi deux étendues égales de matiere devroient toujours avoir la même inertie; ou bien, pourquoi la quantité mécanique devroit toujours ſuivre la quantité géométrique.

X.

Cependant, quand nous réfléchiſſons ſur la cauſe de la gravité, quoiqu'elle nous ſoit inconnue, il ſemble qu'on ne la ſauroit chercher que dans la preſſion d'un fluide extrêmement ſubtil, qui paſſe librement, même à travers les moindres pores des corps. Or une telle preſſion agit toujours en raiſon des volumes; & cela poſé, le poids de chaque corps ſeroit toujours proportionnel à ſa véritable étendue. Donc puiſque le poids eſt auſſi proportionnel à l'inertie ou à la maſſe de chaque corps, il en ſuivroit que la véritable étendue fût toujours proportionnelle à l'inertie, comme preſque tous les Philoſophes ont cru juſqu'ici. Mais quelque fort que puiſſe paroître cet argument, il ne regarde que les corps terreſtres ſur leſquels la gravité agit, & par la même raiſon auſſi ſur tous les corps groſſiers dont les planetes ſont formées, parce qu'elles ſont ſoumiſes à la même loi de gravitation; mais on n'en ſauroit encore rien conclure de certain à l'égard des matieres ſubtiles étendues partout le monde, qui ap-

paremment ne ſont pas aſſujetties à la gravitation, & qui en contiennent plutôt la cauſe.

XI.

Il eſt pourtant fort remarquable, que quoique nous ne voyons aucune liaiſon entre l'inertie & la vraie étendue d'un corps, tous les corps groſſiers non-ſeulement de la terre mais auſſi de tous les corps céleſtes aient cette propriété, que dans tous l'inertie ſoit proportionnelle à la vraie étendue, en vertu de laquelle une certaine étendue de matiere ne ſauroit exiſter, ſans qu'elle ait une certaine inertie ou maſſe. De-là on peut ſoutenir que tous les corps groſſiers, quelques différens qu'ils ſoient en eux-mêmes, ſont compoſés d'une matiere homogene; en prenant, par exemple, des morceaux de toutes ſortes de matieres différentes, chacun d'une livre, ſi nous les concevons réduits à n'avoir plus de pores, tous auront la même étendue & auſſi la même inertie. Donc, n'ayant plus de pores, il ſeroit difficile de dire en quoi tous ces morceaux de matieres ſeroient différens entr'eux.

XII.

Mais quelque eſſentielle que puiſſe être cette liaiſon dans les corps groſſiers, rien n'empêche que les matieres ſubtiles ne ſoient d'une eſpece différente, & qu'une certaine étendue vraie de ces matieres ſubtiles ait beaucoup moins d'inertie qu'une égale étendue vraie des matieres groſſieres: ce ſeroit alors une autre eſpece de matiere; & peut-être y a-t-il encore pluſieurs eſpeces dont chacune joint à la même étendue vraie une inertie plus petite que les précédentes. De-ſorte que le dernier degré, où à une étendue ne con-

viendroit aucune inertie, ſeroit une étendue purement géométrique & un vuide véritable. Mais ſans admettre un tel vuide, pourvu qu'on accorde deux eſpeces de matieres, dont l'une contienne ſous la même étendue moins de maſſe ou d'inertie que l'autre, on eſt en état de lever toutes les difficultés qu'on fait ordinairement contre le *Syſtéme du plein*.

XIII.

Puiſque dans les corps groſſiers l'étendue vraie eſt le plus étroitement liée avec l'inertie, & que l'inertie d'un corps ne ſauroit être changée par quelque cauſe que ce fût; il s'enſuit que la vraie étendue d'un corps groſſier ne ſouffre aucun changement dans ſa quantité. Mais pour les matieres ſubtiles, peut-être que leur nature eſt tout-à-fait différente à cet égard. Il ſemble être bien néceſſaire que la même quantité conſerve toujours la même inertie; mais ne ſeroit-il pas poſſible que la vraie étendue qui exclut tous les pores, devînt tantôt plus grande tantôt plus petite? Ne ſeroit-il pas encore poſſible qu'une telle matiere ſoit douée d'une force de s'étendre continuellement davantage dans ſa propre ſubſtance, ſans y recevoir des pores ou des eſpaces vuides? Cela ne ſeroit pas un agrandiſſement réel; il eſt bien vrai, l'inertie qui ſemble conſtituer l'eſſence des matieres y demeurant la même, un tel aggrandiſſement ne ſauroit être admis ſans un miracle; mais dans ce cas, ne ſeroit-on pas moins embarraſſé de la cauſe de l'élaſticité de l'éther? Je n'oſe entrer dans ces ſublimes recherches; la pénétration m'y manque, & le ſujet préſent ne l'exige pas.

XIV.

Je me contente d'avoir prouvé la poſſibilité que les

eſpaces du ciel, par leſquels les planetes ſemblent ſe mouvoir librement, peuvent être remplis d'une matiere extrêmement ſubtile & très-élaſtique, ſans les ſuppoſer preſque vuides, comme on eſt obligé de faire quand on joint partout à la même inertie la même étendue vraie de matiere. Nonſeulement un tel vuide choque notre eſprit, mais il paroît encore très-incompatible avec cette grande élaſticité qu'on eſt obligé d'attribuer à l'éther. Donc quand on dit que *l'éther eſt tant de mille fois plus rare que l'air*, il ne faut pas entendre que *l'étendue propre d'un certain volume d'éther ſoit autant de fois plus petite que l'étendue propre d'un égal volume d'air*, mais que *cette proportion regarde uniquement l'inertie renfermée en des volumes égaux.*

SECONDE PARTIE.

SUR LA RÉSISTANCE DE L'ÉTHER.

XV.

ICI il se présente d'abord la question : S'il ne seroit pas possible que les planetes se meussent par l'éther sans souffrir la moindre résistance ? Quoiqu'elles en soient poussées en arriere, ne seroit-il pas possible qu'elles en fussent poussées aussi en avant avec une force égale ? car lorsqu'un corps se meut dans l'éther, il en déplace continuellement une partie ; & en lui imprimant un mouvement, il en perd bien autant ; & puisque l'éther derriere le corps est poussé par son élasticité dans les lieux que le corps quitte, il semble qu'il le pourroit accélérer autant qu'il aura été retardé en avant. Ce sentiment a été soutenu par de grands Géometres, qui l'ont cru conforme à la conservation des forces vives ; ils tombent bien d'accord que dès le premier instant le corps communique à l'éther une partie de sa force vive, pour y produire le mouvement dont l'éther, chassé en avant, va suivre le corps par un détour ; mais dès que ce mouvement est une fois engendré, ils prétendent qu'il suffit pour accompagner le corps par tout son mouvement, sans qu'il ait besoin de souffrir une nouvelle perte. Ils regardent cette conservation comme l'effet de la parfaite élasticité de l'éther. Si les planètes, disent-ils, perdoient continuellement de leur mouvement, cette force vive ou périroit tout-à-fait, ou

s'accumuleroit dans l'éther. Or l'un & l'autre leur paroît également absurde.

XVI.

Mais quelque fondé que puisse paroître ce raisonnement, il est détruit par l'expérience. L'air étant un fluide assez parfaitement élastique, il devroit au moins participer de la même qualité, & causer une moindre résistance aux corps qui s'y meuvent, que s'il étoit destitué de toute élasticité. Or nous savons que tous les corps qui se meuvent dans l'air y souffrent une résistance très-considérable, & M. Luloffs prétend même avoir prouvé, par la force que le vent exerce sur les aîles de moulins à vent, que la résistance de l'air est encore plus grande que celle qu'on trouve par les regles ordinaires de Mécanique. Il est aussi inconteſtable, qu'un boulet de canon éprouve une plus grande résistance que selon ces regles, parce qu'il laisse derriere lui un espace vuide, que l'air ne sauroit remplir assez rapidement. D'où l'on peut conclure que quoique l'éther soit beaucoup plus élastique que l'air, cela n'empêche point qu'il n'oppose une résistance très-réelle au mouvement des planetes.

XVII.

Puisque les planetes se meuvent incomparablement plus vîte qu'un boulet de canon, on en pourroit conclure de même, qu'en arriere l'éther dût être plus rare qu'ailleurs, & en avant plus dense & plus accumulé, tout comme cela arrive dans l'air. En appliquant cela à la terre, on verra que la plus grande rareté de l'éther répond aux lieux qui voient le soleil dans le couchant, & la plus grande densité aux lieux

auxquels le ſoleil ſe lève. Donc partout au ſoir l'atmoſphere ſera le moins chargée d'éther, & au matin le plus; & cette variation ne ſauroit manquer de produire des phénomenes bien ſinguliers. Si l'électricité eſt cauſée par un dérangement dans l'état d'équilibre de l'éther, & que l'électricité poſitive ait lieu où l'éther ſe trouve en trop grande abondance, & la négative où l'éther eſt trop rare, il s'enſuivroit que partout vers le ſoir il regne dans l'atmoſphere une électricité négative, & vers le matin une poſitive. Il s'agit donc de conſulter l'expérience, ſi une telle variation a lieu ou non? mon but ne me permet pas d'entrer dans cette diſcuſſion.

XVIII.

Cependant lorſqu'un corps ſe meut dans l'éther, on n'en peut pas déterminer la réſiſtance ſur le même pied que dans l'air ou dans l'eau, où toute la ſurface antérieure du corps reçoit l'impulſion du fluide. Comme l'éther eſt une matiere extrêmement ſubtile, il pénetre preſque librement tous les pores des corps; il en eſt preſque de même que ſi par exemple un crible ſe mouvoit dans l'eau ou dans l'air, qui ſans doute ſouffriroit une réſiſtance beaucoup plus petite qu'une ſurface ſolide. Les planetes ne rencontrent donc de réſiſtance dans l'éther qu'entant que leurs parties ſolides empêchent que l'éther ne paſſe tout à-fait librement à travers de leur maſſe. D'où l'on voit que la réſiſtance déterminée par la regle ordinaire doit être diminuée de la partie qui répond au libre paſſage de l'éther; ou bien il ne faut conſidérer qu'une certaine partie de la ſurface de la planete qui eſt expoſée à la réſiſtance, & qui, ſelon toutes les apparences, ſera très-petite à l'égard de toute la ſurface. D'ailleurs, l'obliquité dont les particules ſolides ſont choquées par l'éther, peut encore conſidérablement diminuer la réſiſtance.

XIX.

Concevons donc un corps sphérique, dont la masse soit A, le rayon $= a$, & qui se meut avec une vîtesse égale à celle qu'un corps pesant sur la terre acquerreroit en tombant de la hauteur $= v$. Soit la densité du corps n fois plus grande que celle de l'éther, & selon la regle commune la résistance qu'éprouve le grand cercle est exprimé par le poids d'un cylindre d'éther, dont le rayon de la base $= a$ & la hauteur $= v$, & partant la solidité $= \pi a a v$. Or la solidité du globe étant $\frac{4}{3} \pi a^3$ & la masse $= A$, la masse de ce cylindre, s'il étoit de la même matiere, seroit $= \frac{3 A v}{4 a}$, donc la masse de ce cylindre d'éther $= \frac{3 A v}{4 n a}$, qui exprimeroit la résistance d'un grand cercle du globe, réduisant la masse au poids que ce même corps auroit sur la terre. Mais la résistance qu'éprouve le globe même est d'abord deux fois plus petite, ou $\frac{3 A v}{8 n a}$, & il la faudra encore diminuer, à cause de la pénétration de l'éther, & peut-être aussi à cause d'une plus grande obliquité d'impulsion.

XX.

Comme nous devons nous contenter de savoir cette diminution en gros, & qu'il est impossible de la déterminer *à priori*, posons la véritable résistance $= \frac{3 A v}{8 \lambda n a}$ où, selon toutes les apparences, le nombre λ doit être assez considérable; or le nombre n est prodigieusement grand; car si nous supposons la densité de l'éther 360 000 000 fois plus petite que celle de l'air, & que la

la denſité du corps ſoit égale à celle de l'eau, le nombre n ſera $= 800 \times 360\,000\,000 = 288\,000\,000\,000$. Enſuite la vraie étendue du corps étant pour le moins 19 fois plus petite que l'apparente, à cauſe de ſa nature criblée à l'égard de l'éther, le nombre λ pourroit bien ſurpaſſer 10; donc poſant pour abréger $\frac{3}{8\lambda n} = \mu$, la valeur de cette fraction ſeroit environ

$$\mu = 1 : 10\,000\,000\,000\,000,$$

laquelle demeureroit à-peu-près la même, ſi le corps étoit plus ou moins denſe. Or ſi nous ſuppoſons l'éther encore dix fois moins denſe, nous aurions pour μ une fraction encore dix fois plus petite; & comme il eſt poſſible que la valeur de λ ſoit conſidérablement plus grande que dix, la fraction μ pourroit être encore plus petite que $1 : 100\,000\,000\,000\,000$; & on verra par la ſuite que la réſiſtance qui en réſulte, pourra très-bien ſubſiſter avec les obſervations.

XXI.

Appliquons cela au mouvement d'une planete qui ſe meuve autour du ſoleil dans un cercle parfait, puiſque nous ſavons que l'effet de cette réſiſtance eſt extrêmement petit, & que le mouvement continuera de ſe faire dans un cercle pendant très-longtems, cherchons la diminution du mouvement pendant un tems quelconque. Soit la diſtance de la planete au ſoleil $= c$, ſa vîteſſe dûe à la hauteur $= v$, & l'attraction du ſoleil à cette diſtance $c = \frac{ff}{cc}$; prenant pour l'unité la gravité ſur la terre, & parce que le mouvement ſe fait dans un cercle, il faut que la force centrifuge ſoit $= \frac{2v}{c} = \frac{ff}{cc}$, & partant $v = \frac{ff}{2c}$; donc la réſiſtance de

l'éther $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ff}{2ac}$, que nous pouvons regarder comme conſtante pour un très-long tems. De-là, pendant que la planete parcourre l'eſpace ds, nous aurons $dv = \frac{-\mu ff}{2ac} ds$, & par conſéquent

$$v = \frac{ff}{2c} - \frac{\mu ffs}{2ac}\left(1 - \frac{\mu s}{a}\right).$$

XXII.

Pour mieux connoître les élémens de cette expreſſion, ſoit le tems périodique de la planète $= \Theta$ ſecondes, pendant lequel elle parcourre toute la circonférence du cercle $= 2\pi c$; deſorte que dans une ſeconde elle parcourre l'eſpace $= \frac{2\pi c}{\Theta}$, ſa vîteſſe étant dûe à la hauteur $= v$. Or poſant g pour la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde, cet eſpace parcouru par la planete dans une ſeconde, eſt auſſi $= 2\sqrt{gv}$; donc $\sqrt{gv} = \frac{\pi c}{\Theta} = \sqrt{\frac{gff}{2c}}$: par conſéquent $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta\Theta}$; d'où l'on connoîtra le rapport de la force accélératrice du ſoleil à chaque diſtance à la force accélératrice de la gravité naturelle ſur la terre.

XXIII.

Quoique le retardement du mouvement dérange d'abord le mouvement circulaire; avant que d'entreprendre les recherches réquiſes pour développer cette queſtion, je conſidererai ici la choſe comme ſi la planete ſe mouvoit dans un canal circulaire, qui l'em-

pêchât d'en ſortir. Ce cas, quoique imaginaire, nous ſera connoître en gros après combien de tems l'effet de la réſiſtance peut devenir ſenſible ; parce que pendant une révolution la planete parcourt l'eſpace $= 2\pi c$, & pendant ν révolutions ou dans le tems de $\nu\Theta$ ſecondes l'eſpace $= 2\nu\pi c$; poſant cette valeur pour s, nous aurons pour la viteſſe de la planete après ce tems

$$v = \frac{ff}{2c}\left(1 - \frac{2\mu\nu\pi c}{a}\right),$$

& la viteſſe même

$$\sqrt{v} = \left(1 - \frac{\mu\nu\pi c}{a}\right)\sqrt{\frac{ff}{2c}};$$

d'où nous voyons que la diminution de la viteſſe vaut la partie $\frac{\mu\nu\pi c}{a}$ de la viteſſe initiale.

XXIV.

Faiſons l'application de cette formule au mouvement de la terre, où l'on a environ $c = 18\,000\,a$ & $\Theta = 31\,556\,930''$, & cherchons après combien de tems la diminution de la viteſſe pourroit devenir

$$\frac{\mu\nu\pi c}{a} = 18\,000\,\mu\nu\pi = \frac{1}{31\,556\,930},$$

puiſqu'un changement d'une ſeconde dans le tems périodique de la terre ſeroit déja remarquable. Suppoſons que cela arrive après ν ans, & nous aurons

$$\nu = \frac{1}{18\,000 \times 31\,556\,930.\,\mu\pi}.$$

Donnons à μ la valeur marquée ci-deſſus (XX), & nous obtiendrons

$$\nu = \frac{10\,000\,000\,000\,000}{18000 \times 31\,556\,930.\,\pi},$$

ou bien $\nu = \frac{100}{18}$ à-peu-près.

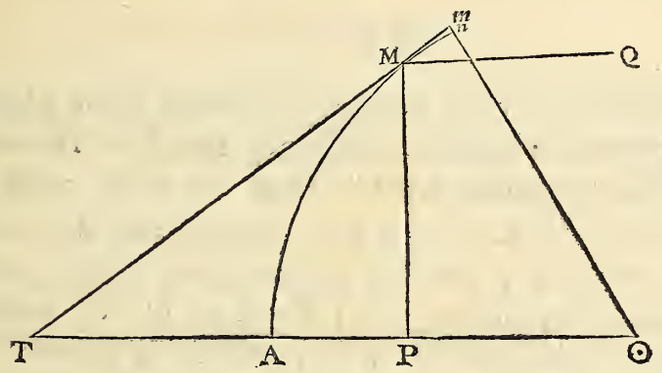
De-là il s'enſuivroit qu'un tel effet pourroit être produit en ſix ans. Or quand même la valeur de μ ſeroit encore plus petite, l'effet de la réſiſtance de l'éther ſur le mouvement des planetes, pourroit toutefois devenir très-ſenſible après un aſſez grand nombre d'années.

XXV.

Mais il ne ſuit pas de la diminution de la viteſſe, que le tems périodique doive devenir plus long; il en doit même réſulter un effet entierement contraire. La planete étant rallentie dans ſon mouvement, s'approchera plus du ſoleil, & décrira une orbite plus petite, à laquelle répond néceſſairement un tems périodique plus court. Par cette raiſon, il s'en faut beaucoup que la détermination précédente ſoit juſte, quand même le nombre μ ſeroit aſſez exact. Le véritable dérangement, que la réſiſtance de l'éther peut cauſer dans le mouvement des planetes, demande des recherches beaucoup plus profondes, & qui feront le ſujet de ma Troiſieme Partie.

TROISIEME PARTIE.

Sur le dérangement du mouvement des Planetes cauſé par la réſiſtance de l'Éther.



XXVI.

Conſidérons donc une planete quelconque, dont la maſſe ſoit A, ſon rayon $= a$, & laquelle étant attirée vers le ſoleil en ⊙ & aſſujettie à la réſiſtance de l'éther, décrive la ligne courbe AM; que cette planete ait parcouru après un tems de t ſecondes l'arc AM, & ſoit l'angle au ſoleil $A \odot M = \varphi$. Soit enſuite la diſtance de la planete au ſoleil $\odot M = z$, & la force accélératrice du ſoleil étant poſée $= \frac{ff}{zz}$, nous avons vu que ſi nous exprimons le tems périodique de la terre par ⊙ ſecondes, ſa diſtance moyenne au ſoleil

par c & la hauteur par laquelle un corps grave tombe ſur la terre dans une ſeconde par g, il ſera $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\odot^2}$ où π marque la circonférence d'un cercle dont le diametre eſt $= 1$. Or la force accélératrice du ſoleil $\frac{ff}{\zeta\zeta}$ agit ſur la planete ſelon la direction $M\odot$, & en la décompoſant ſelon les directions fixes des coordonnées $\odot P = x$; $PM = y$; à cauſe de $x = \zeta$ *cof.* φ & $y = \zeta$ *ſin.* φ, nous aurons les forces ſelon $MP = \frac{ff}{\zeta\zeta}$ *ſin.* φ & ſelon $MQ = \frac{ff}{\zeta\zeta}$ *cof.* φ.

XXVII.

Maintenant pour connoître la vîteſſe de la planete de laquelle dépend la réſiſtance, ſoit Mm l'élément d'eſpace parcouru dans le tems dt & à cauſe de $Mn = \zeta\, d\varphi$ & $mn = d\zeta$, nous aurons $Mm = \sqrt{(d\zeta^2 + \zeta\zeta\, d\varphi^2)}$ que je nommerai pour abréger $= ds$ & faiſant la proportion $dt : ds = 1 : \frac{ds}{dt}$. Or prenant v pour la hauteur dûe à la viteſſe de la planete, ce même eſpace parcouru par la planete dans une ſeconde eſt auſſi $= 2\sqrt{gv}$, d'où nous tirons $v = \frac{ds^2}{4g\,dt^2}$, & partant la force accélératrice de la réſiſtance, contraire au mouvement & agiſſant ſelon la tangente MT, ſera ſuivant les principes établis ci-deſſus $= \frac{\mu v}{a} = \frac{\mu\, ds^2}{4g\,a\,dt^2}$ où μ eſt une fraction extrêmement petite, que j'ai eſtimée ci-deſſus (XX). Enſuite pour la décompoſition de cette force qui eſt ſelon MT, ayant $MT : PT : MP = ds : -dx : dy$, nous trouvons la force ſelon $PT = \frac{-\mu\, dx\, ds}{4g\,a\,dt^2}$ & ſelon $MP = \frac{\mu\, dy\, ds}{4g\,a\,dt^2}$.

XXVIII.

Donc conjointement la planete en M eſt ſollicitée par ces deux forces accélératrices :

L'une ſelon $MQ = \frac{ff\,cof.\,\varphi}{\zeta\zeta} + \frac{\mu\,dx\,ds}{4gadt^2}$,

Et l'autre ſelon $MP = \frac{ff\,ſin.\,\varphi}{\zeta\zeta} + \frac{\mu\,dy\,ds}{4gadt^2}$.

De-là les principes de la Mécanique nous fourniſſent ces deux équations :

$$ddx = \frac{-2gffdt^2\,cof.\,\varphi}{\zeta\zeta} - \frac{\mu\,dx\,ds}{2a},$$

$$\&\ ddy = \frac{-2gffdt^2\,ſin.\,\varphi}{\zeta\zeta} - \frac{\mu\,dy\,ds}{2a};$$

où il faut remarquer que l'on a $x = \zeta\,cof.\,\varphi$; $y = \zeta\,ſin.\,\varphi$;

donc $dx = d\zeta\,cof.\,\varphi - \zeta\,d\varphi\,ſin.\,\varphi$;

$dy = d\zeta\,ſin.\,\varphi + \zeta\,d\varphi\,cof.\,\varphi$;

$\&\ ddx = dd\zeta\,cof.\,\varphi - 2\,d\zeta\,d\varphi\,ſin.\,\varphi - \zeta\,d\varphi^2\,cof.\,\varphi - \zeta\,dd\varphi\,ſin.\,\varphi$;

$ddy = dd\zeta\,ſin.\,\varphi + 2\,d\zeta\,d\varphi\,cof.\,\varphi - \zeta\,ſin.\,\varphi + d\varphi^2 + \zeta\,dd\varphi\,cof.\,\varphi$;

enſuite $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(d\zeta^2 + \zeta\zeta\,d\varphi^2)}$;

d'où nous tirons aiſément ces deux équations :

I. $ddx\,ſin.\,\varphi - ddy\,cof.\,\varphi = -2\,d\zeta\,d\varphi - \zeta\,dd\varphi = +\frac{\mu\zeta\,d\varphi\,ds}{2a}$;

II. $ddx\,cof.\,\varphi + ddy\,ſin.\,\varphi = dd\zeta - \zeta\,d\varphi^2 = \frac{-2gffdt^2}{\zeta\zeta} - \frac{\mu\,d\zeta\,ds}{2a}$;

où l'élément du tems dt est supposé constant, & $2gff = \frac{4\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}$, de sorte que la quantité g sort du calcul.

XXIX.

La premiere de ces deux équations étant divisée par $z\,d\varphi$, donne

$$\frac{2\,d'z}{z} + \frac{d\,d\varphi}{d\varphi} + \frac{\mu\,ds}{2a} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z\,z\,d\varphi.e^{\frac{\mu s}{2a}} = G\,dt,$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, & G une quantité constante. Ensuite puisque

$$ds\,dds = dz\,ddz + e\,dz\,d\varphi^2 + z\,z\,d\varphi\,ddd\varphi,$$

si nous multiplions la premiere par $-z\,d\varphi$, & la seconde par dz, la somme en sera

$$1.)\quad ds\,dds = \frac{-2gff\,dt^2\,dz}{z\,z} - \frac{\mu\,ds^3}{2a};$$

or l'équation $z\,z\,d\varphi.e^{\frac{\mu s}{2a}} = G\,dt$,
à cause de $z\,z\,d\varphi^2 = ds^2 - dz^2$,
en éliminant $d\varphi$, donne

$$2.)\quad e^{\frac{\mu s}{a}}\,z\,z\,(ds^2 - dz^2) = GG\,dt^2.$$

Desorte que nous avons deux équations entre les trois variables z, s, t; si nous multiplions celle-là 1.) par $\frac{2}{dt^2}$, l'intégration fournira

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{\mu}{a}\int\frac{ds^3}{dt^2},$$

qui

qui à cauſe de μ preſque évanouiſſant ſe réduit à

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right) - \frac{4\mu gff}{a}\int ds\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right).$$

XXX.

Puiſque nous ſavons que l'effet de la réſiſtance eſt extrêmement petit, négligeons d'abord les termes affectés par μ; & ayant ces deux équations

$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)$ & $GGdt^2 = \zeta\zeta(ds^2 - d\zeta^2)$;

en éliminant dt^2, nous trouvons

$$ds^2 = \frac{4gff}{GG}\zeta\zeta(ds^2 - d\zeta^2)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right);$$

donc poſant, pour abréger,

$$\frac{4gff}{GG} = \frac{8\pi\pi c^3}{CC\Theta\Theta} = \frac{1}{h},$$

deſorte que

$$G = \frac{2\pi c}{\Theta}\sqrt{2ch} \quad \text{(XXVI.)}$$

nous obtiendrons

$$ds = \frac{\zeta d\zeta\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)}}{\sqrt{\left(\zeta\zeta\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right) - h\right)}} \text{ ou } ds = \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1 - \frac{bh}{z(z+b)}\right)}}.$$

XXXI.

Cette valeur de ds ſuffit pour être introduite dans les petits termes de nos équations affectés par μ. Soit donc $\frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1 - \frac{bh}{z(z+b)}\right)}} = d\sigma$, ou bien qu'on écrive dans tous les termes affectés par μ, au lieu de s, la

lettre σ, & nous aurons les équations suivantes:

I. $e^{\frac{\mu\sigma}{a}} \zeta\zeta (ds^2 - d\zeta^2) = C dt^2 = \frac{8\pi\pi c^3 h}{\Theta\Theta} dt^2$;

II. $\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{8\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right)\right)$;

III. $e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta\zeta\, d\varphi = \frac{2\pi c\sqrt{2ch}}{\Theta} dt$;

où σ est une fonction de ζ. Donc éliminant dt^2 des deux premieres équations, nous obtiendrons:

$$e^{\frac{\mu\sigma}{a}} \zeta\zeta (ds^2 - d\zeta^2)\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right)\right) = h ds^2;$$

& de-là

$$1)\ ds = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta\, d\zeta \sqrt{\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right)\right)}}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta\zeta\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right)\right) - h\right)}}.$$

D'où l'on trouve plus exactement s par ζ. Ensuite on aura,

$$2)\ dt = \frac{\Theta}{2\pi c\sqrt{2c}} \cdot \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} \zeta\, d\zeta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}} \zeta\zeta\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right)\right) - h\right)}}$$

$$\&\ 3)\ d\varphi = \frac{d\zeta\sqrt{h}}{\zeta\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}} \zeta\zeta\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{b}\right)\right) - h\right)}}.$$

XXXII.

Pour profiter de ces équations, il faut tâcher d'en appliquer la solution à l'usage de l'Astronomie. Pour cet effet, prenant $h = \frac{k}{2}$ & $b = \frac{-2k}{1-nn}$, on a pour le

cas où la réſiſtance évanouit $\zeta = \frac{h}{1 + n \cos. \omega}$ & $d\varphi = d\omega$; deſorte que k exprime le demi-parametre, n l'excentricité, & ω l'anomalie vraie de l'orbite comptée depuis le périchélie. Cette expreſſion de ζ, comme très-approchante, étant introduite pour avoir la valeur de σ, on trouve,

$$d\sigma = \frac{k\, d\omega \sqrt{(1 + 2n \cos. \omega + nn)}}{(1 + n \cos. \omega)^2};$$

laquelle expreſſion eſt aſſez exacte, pourvu qu'on ne ſuppoſe pas un tems aſſez long, pour que l'effet de la réſiſtance devienne trop conſidérable. Or en n'étendant le calcul qu'à quelques ſiecles, pendant leſquels l'effet de la réſiſtance demeure encore preſque inſenſible, on peut enſuite répéter le même calcul pour les ſiecles ſuivans de la même maniere.

XXXIII.

Puiſque dans le cas de nulle réſiſtance on a

$$\zeta = \frac{k}{1 + n \cos. \omega};$$

ſuppoſons, en tenant compte de la réſiſtance

$$\zeta = \frac{k}{1 + n \cos. \omega + \mu u};$$

& tâchons de déterminer u enſorte qu'il demeure $d\varphi = d\omega$. Pour cet effet, ayant

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1 + n \cos. \omega + \mu u}{k},$$

la différentiation nous fournit

$$\frac{d\zeta}{\zeta\zeta} = \frac{n\, d\omega \sin. \omega - \mu\, du}{k};$$

laquelle valeur doit être introduite dans la troiſieme

équation (XXXI), qui à cauſe de $d\varphi = d\omega$ & $e^{\frac{\mu\sigma}{a}} = 1 + \frac{\mu\sigma}{a}$ ſe réduit à cette forme :

$$d\omega = \frac{d\zeta\sqrt{h}}{\zeta\zeta\sqrt{\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}\right)+\frac{\mu\sigma}{a}\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}\right)-\frac{h}{\zeta\zeta}\right)}};$$

ou bien à cauſe de

$$-\int d\sigma\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}\right)+\sigma\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}\right)=\int\sigma d.\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}\right)=-\int\frac{\sigma d\zeta}{\zeta\zeta}=-\frac{n}{k}\int d\omega\,\sin.\omega=-n\int d\omega\,\sin.\omega\int\frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos.\omega+nn)}}{(1+n\cos.\omega)^2}$$

à celle-ci :

$$d\omega=\frac{d\zeta\sqrt{h}}{\zeta\zeta\sqrt{\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}-\frac{h}{\zeta\zeta}-\frac{\mu n}{a}\int d\omega\,\sin.\omega\int\frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos.\omega+nn)}}{(1+n\cos.\omega)^2}\right)}}$$

XXXIV.

Or $\frac{1}{b}$ étant $=\frac{-1+nn}{2k}$, nous aurons

$$\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}=\frac{1+2n\cos.\omega+nn+2\mu u}{2k};$$

& puiſque $h=\frac{k}{2}$ nous obtiendrons

$$\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{b}-\frac{h}{\zeta\zeta}=\frac{nn\sin.\omega^2-2\mu u.n\cos.\omega}{2k};$$

Par conſéquent

$$d\omega=\frac{n\,d\omega\,\sin.\omega-\mu\,du}{\sqrt{(nn\sin.\omega^2-2\mu n u\cos.\omega-\frac{2\mu n}{a}\int\sigma\,d\omega\,\sin.\omega)}}$$

d'où prenant les quarrés, on trouve, en négligeant les termes qui renfermeroient $\mu\mu$,

$$nn\,d\omega\sin.\omega^2-2\mu n u\,d\omega\cos.\omega-\frac{2\mu n}{a}d\omega\int\sigma\,d\omega\,\sin.\omega=nn\,d\omega\sin.\omega^2-2n\mu\,du\sin.\omega;$$

& partant, $du\sin.\omega-u\,d\omega\cos.\omega=\frac{d\omega}{a}\int\sigma\,d\omega\,\sin.\omega$,

qui étant diviſée par $\sin.\ \omega^2$ & intégrée, donne

$$\frac{u}{\sin.\ \omega} = \frac{1}{a}\int \frac{d\omega}{\sin.\ \omega^2}\int \sigma\, d\omega \sin.\ \omega = \frac{-\cos.\ \omega}{a \sin.\ \omega}\int \sigma\, d\omega \sin.\ \omega + \frac{1}{a}\int \sigma\, d\omega \cos.\ \omega ;$$

ou bien $u = \frac{1}{a}(\sin.\ \omega \int \sigma\, d\omega \cos.\ \omega - \cos.\ \omega \int \sigma\, d\omega \sin.\ \omega)$;

ayant $\sigma = k\int \frac{d\omega \sqrt{(1 + \omega 2\, n \cos.\ \omega + nn)}}{(1 + n \cos.\ \omega)^2}$.

XXXV.

Pourvu que l'excentricité ſoit moindre que l'unité ou $n < 1$, comme il arrive toujours dans les ellipſes, l'arc σ ſe réduit à une telle expreſſion :

$$\sigma = k\left(A\,\omega + B\,n \sin.\ \omega + C\,n^2 \sin.\ 2\,\omega + D\,n^3 \sin.\ 3\,\omega + E\,n^3 \sin.\ 4\,\omega + \&c.\right)$$

Or pour en trouver d'autant plus facilement la valeur de u, prenons la différentielle de l'équation trouvée ci-deſſus, $d\,u \sin.\ \omega - u\, d\,\omega \cos.\ \omega = \frac{d\omega}{a}\int \sigma\, d\,\omega \sin.\ \omega$, qui eſt : $d\,d\,u \sin.\ \omega + u\, d\,\omega^2 \sin.\ \omega = \frac{d\omega^2}{a}\sigma \sin.\ \omega$, ou bien $\frac{d\,d\,u}{d\,\omega^2} + u = \frac{\sigma}{a} = \frac{k}{a}\left(A\,\omega + B\,n \sin.\ \omega + C\,n^2 \sin.\ 2\,\omega + D\,n^3 \sin.\ 3\,\omega + E\,n^4 \sin.\ 4\,\omega + \&c.\right)$.

Poſons maintenant $u = \alpha\,\omega + \mathfrak{C} \sin.\ \omega + \gamma \sin.\ 2\,\omega + \mathfrak{d} \sin.\ 3\,\omega + \varepsilon \sin.\ 4\,\omega + \&c.$

& puiſque $\frac{d\,u}{d\,\omega} = \alpha + \mathfrak{C} \cos.\ \omega + \Delta \cos.\ \omega - \Delta\,\omega \sin.\ \omega + 2\,\gamma \cos.\ 2\,\omega + 3\,\mathfrak{d} \cos.\ 3\,\omega + 4\,\varepsilon \cos.\ 4\,\omega + \&c.$

enſuite $\frac{d\,d\,u}{d\,\omega^2} = -\mathfrak{C} \sin.\ \omega - 2\,\Delta \sin.\ \omega - \Delta\,\omega \cos.\ \omega - 4\,\gamma \sin.\ 2\,\omega - 9\,\mathfrak{d} \sin.\ 3\,\omega - 16\,\varepsilon \sin.\ 4\,\omega - \&c.$

donc $\frac{d\,d\,u}{d\,\omega^2} + u = \alpha\,\omega - 2\,\Delta\,\mathit{sin.}\,\omega - 3\,\gamma\,\mathit{sin.}\,2\,\omega - 8\,\delta\,\mathit{sin.}\,3\,\omega - 15\,\epsilon\,\mathit{sin.}\,4\,\omega - \&c.$

d'où nous tirons $\alpha = \frac{A\,k}{a}$; $\Delta = \frac{-B\,n\,k}{2\,a}$; $\gamma = \frac{-C\,n^2\,k}{3\,a}$; $\delta = \frac{-D\,n^3\,k}{8\,a}$; $\epsilon = \frac{-E\,n^4\,k}{15\,a}$ &c.

& par conséquent $u = \frac{k}{a}\left(A\,\omega + \mathfrak{C}\,\mathit{sin.}\,\omega - \frac{B\,n}{2}\,\omega\,\mathit{cos.}\,\omega - \frac{1}{3}\,C\,n^2\,\mathit{sin.}\,2\,\omega - \frac{1}{8}\,D\,n^3\,\mathit{sin.}\,3\,\omega - \frac{1}{15}\,E\,n^4\,\mathit{sin.}\,4\,\omega - \&c.\right)$ où le coëfficient $\mathfrak{C}$ demeure indéterminé; on le pourra donc prendre $= o$, car quelque valeur qu'on donneroit à $\mathfrak{C}$, on ne feroit que changer l'excentricité & le lieu de l'aphélie.

XXXVI.

Donc posant $\int \frac{d\,\omega\,\mathcal{V}\,(1 + 2\,n\,\mathit{cos.}\,\omega + n\,n)}{(1 + n\,\mathit{cos.}\,\omega)^2} = A\,\omega + B\,n\,\mathit{sin.}\,\omega - C\,n^2\,\mathit{sin.}\,2\,\omega + D\,n^3\,\mathit{sin.}\,3\,\omega + E\,n^4\,\mathit{sin.}\,4\,\omega + \&c.$ nous aurons, après que la planete aura achevé l'angle $\varphi = \omega$ pour sa distance au soleil :

$$\zeta = \frac{k}{1 + n\,\mathit{cos.}\,\omega + \frac{\mu\,k}{a}\left(A\,\omega - \frac{1}{2}\,B\,n\,\omega\,\mathit{cos.}\,\omega - \frac{1}{3}\,C\,n^2\,\mathit{sin.}\,2\,\omega - \frac{1}{8}\,D\,n^3\,\mathit{sin.}\,3\,\omega - \&c.\right)}$$

Ensuite le tems l se trouvera déterminé par cette équation : $\frac{2\,\pi\,c\,\mathcal{V}\,c\,k}{\Theta}\,t = \int \left(1 + \frac{\mu\,o}{2\,a}\right)\zeta\,\zeta\,d\,\omega.$

Or $\zeta\,\zeta = \frac{k\,k}{(1 + n\,\mathit{cos.}\,\omega)^2} - \frac{2\,\mu\,k^3}{a\,(1 + n\,\mathit{cos.}\,\omega)^3}\left(A\,\omega - \frac{1}{2}\,B\,n\,\omega\,\mathit{cos.}\,\omega - \frac{1}{3}\,C\,n\,2\,\mathit{sin.}\,2\,\omega - \frac{1}{8}\,D\,n^3\,\mathit{sin.}\,3\,\omega - \&c.\right)$

& $1 + \frac{\mu\,o}{2\,a} = 1 + \frac{\mu\,k}{2\,a}\left(A\,\omega + B\,n\,\mathit{sin.}\,\omega + C\,n^2\,\mathit{sin.}\,2\,\omega + D\,n^3\,\mathit{sin.}\,3\,\omega + \&c.\right)$

$$\text{donc } \frac{2\pi c \sqrt{c}}{\Theta k \sqrt{k}}\, t = \int \frac{d\omega}{(1+n\cos.\omega)^2} - \frac{2\mu k}{a} \int \frac{d\omega\,(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\cos.\omega - \frac{1}{3}Cn^2\sin.2\omega - \frac{1}{8}Dn^3\sin.3\omega - \&c.)}{(1+n\cos.\omega)^3} + \frac{\mu k}{2a}\int \frac{d\omega\,(A\omega + Bn\sin.\omega + Cn^2\sin.2\omega + Dn^3\sin.3\omega + \&c)}{(1+n\cos.\omega)^2}$$

XXXVII.

Ces formules ſuffiſent pour déterminer tous les dérangemens que la réſiſtance de l'éther peut cauſer dans le mouvement de toutes les planetes ; ce qui étant la queſtion propoſée par l'*Illuſtre Académie Royale des Sciences*, je m'en vais en developper tous les phénomenes qui doivent ſe trouver dans le mouvement des Planetes. On ne ſera pas ſurpris que je faſſe ici abſtraction des dérangemens que les planetes ſe cauſent par leur action mutuelle, il eſt évident qu'elle n'influe point ſur l'effet de la réſiſtance. Je conſidererai donc trois cas, le premier où l'orbite de la planète n'a aucune excentricité, le ſecond où l'excentricité eſt très-petite, & le troiſieme où l'excentricité eſt médiocre.

I. L'Orbite de la Planete n'ayant aucune excentricité.

XXXVIII.

Dans ce cas $n = o$ on aura $\sigma = k\omega$ (§. XXXII) $A = 1$; $B = o$; $C = o$, &c. (XXXV) & partant nos formules ſeront :

$$z = \frac{k}{1 + \frac{\mu k \omega}{a}} \quad \& \quad \frac{2\pi c \sqrt{c}}{\Theta k \sqrt{k}}\, t = \omega - \frac{3\mu k}{4a}\omega\omega \quad \text{(XXXVI)}$$

où k est le rayon de l'orbite au tems $t = o$, a le rayon du corps de la planete, & ω l'angle décrit autour du soleil dans un tems quelconque t. Là-dessus je fais les réflexions suivantes :

1°. Après une révolution où $\omega = 2\pi$, la distance de la planete au soleil sera $z = \frac{k}{1 + \frac{2\mu k}{a}\pi}$, & partant tant soit peu plus petite qu'au commencement.

2°. Après m révolutions où $\omega = 2\pi m$, la distance de la planete au soleil sera $z = \frac{k}{1 + \frac{2\mu\pi m k}{a}}$. La planete s'approchera donc de plus en plus du soleil, mais si insensiblement, que pendant chaque révolution l'orbite ne differe point d'un cercle.

3°. Le tems pendant lequel la planete acheve m révolutions est $t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta\, m\,(1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi m)$; or le tems pendant lequel elle acheve $m + 1$ révolutions, est $t' = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta\,(m+1)\,(1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi\,(m+1))$.

4°. Donc après m périodes, le tems d'une révolution sera $t' - t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta\,(1 - \frac{3\mu k}{2a}\pi\,(2m+1))$, d'où l'on voit que le tems périodique va en diminuant, le premier étant $= \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta$.

5°. La résistance se réduira donc à ces deux effets : le *premier*, que la distance au soleil diminue ; & le *second*, que le tems périodique devient plus court. Or le mouvement demeure circulaire, sans qu'il en résulte une excentricité.

XXXIX.

XXXIX.

Pour le mouvement de la terre, ſi nous en négligeons l'excentricité, nous avons $k = c$ & $\Theta = 365^j$, 6^h, $9'$, $36'' = 31\,558\,176''$, qui eſt le tems périodique par rapport aux étoiles fixes. Enſuite poſant la parallele horizontale du ſoleil $= 12''$, nous avons $\frac{k}{a} = 17\,000$ & $\frac{3}{2}\frac{k}{a} = 77\,000$. Donc après m révolutions, la diminution du tems périodique ſera de $77\,000 \times 31\,558\,176 \times \mu (2m + 1)$ ſecondes, ce qui fait, en mettant pour μ le nombre donné ci-deſſus par eſtime $\mu = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000}$ environ $0,\ 24299\ 79552\ (2m + 1)''$, ou bien $\frac{243}{1000}(2m + 1)$ ſecondes. Après un ſiecle, la diminution de l'année ſolaire ſeroit donc $= \frac{201 \times 243''}{1000} = 49''$, laquelle étant très-ſûrement trop grande, puiſque la diminution ſéculaire eſt moindre que $5''$, il eſt clair que la fraction μ eſt au moins 10 fois plus petite qae je ne l'ai ſuppoſée ici. Il ſemble donc que le nombre λ employé ci-deſſus (XX) doit ſurpaſſer 100, à moins qu'on ne veuille diminuer la denſité de l'éther aux dépens de ſon élaſticité; l'un & l'autre paroît également probable.

II. L'Orbite de la planete ayant une très-petite excentricité.

XL.

Soit donc la fraction n, qui exprime l'excentricité ſi petite, qu'on puiſſe négliger dans le calcul ſon quarré nn, & nous aurons, pour l'arc σ, cette expreſſion :

$$\sigma = k \int d\omega\,(1 + n \cos.\omega)(1 - 2n \cos.\omega = k \int d\omega\,(1 - n \cos.\omega) = k(\omega - n \sin.\omega)$$

(XXXII), & partant $A = 1$ & $B = -1$; de-là nous concluons la distance

$$r = \frac{k}{1 + n \cos. \omega + \frac{\mu k}{a} (\omega + \frac{1}{2} n \omega \cos. \omega)}.$$

Lorsque la planete aura parcouru dans son orbite l'angle ω, posant le tems qu'elle y a employé $= t$, nous aurons $\frac{2 \pi c \sqrt{c}}{\odot k \sqrt{k}} t = \int d\omega (1 - 2 n \cos. \omega) - \frac{2 \mu k}{a} \int d\omega (1 - 3 n \cos. \omega) (\omega + \frac{1}{2} n \omega \cos. \omega) + \frac{\mu k}{2 a} \int d\omega (1 - 2 n \cos. \omega) (\omega - n \sin. \omega)$;

ou bien $\frac{2 \pi c \sqrt{c}}{\odot k \sqrt{k}} t = \omega - 2 n \sin. \omega - \frac{\mu k}{2 a} \int d\omega (3 \omega - 8 n \omega \cos. \omega + n \sin. \omega)$;

& prenant toutes les intégrales: $\frac{2 \pi c \sqrt{c}}{\odot k \sqrt{k}} t = \omega - 2 n \sin. \omega - \frac{\mu k}{2 a} (\frac{3}{2} \omega^2 - 8 n \omega \sin. \omega - 9 n \cos. \omega)$,

où k marque le demi-parametre, ou plutôt la distance moyenne de la planete au soleil.

XLI.

Examinons d'abord l'orbite de la planete après qu'elle aura achevé m révolutions; posons pour cette fin $\omega = 2 \pi m + \varphi$, desorte que φ marque l'angle parcouru dans la révolution suivante, & la distance de la planete au soleil sera exprimée de cette façon:

$$r = \frac{k}{1 + n \cos. \varphi + \frac{\mu k}{a} (2 \pi m + \varphi) (1 + \frac{1}{2} n \cos. \varphi)}.$$

Ici je remarque que la plus petite distance n'est pas celle où $\varphi = o$, comme il arriveroit s'il n'y avoit

point de réſiſtance, mais celle où $\varphi = \frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n (a + \mu \pi m k)}$, deſorte que pendant ce tems la ligne des abſides eſt avancée de l'angle $\varphi = \frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n (a + \mu \pi m k)}$. Mais poſant $m = o$, dès le premier mouvement la réſiſtance fait que le périhélie réponde à l'angle $\frac{\mu k (1 + \frac{1}{2} n)}{n a}$, donc pendant m révolutions, il recule par $\frac{\mu \mu \pi m k k (1 + \frac{1}{2} n)}{n a (a + \mu \pi m k)} = \frac{\mu \mu \pi m}{n} \cdot \frac{k k}{a a}$, ce qui eſt abſolument inſenſible; car ſi n eſt extrêmement petit, on ne peut plus diſtinguer le périhélie.

XLII.

Poſons donc $\varphi = \frac{\mu k}{n a}$ pour trouver la plus petite diſtance de la planete au ſoleil, qui ſera

$$\zeta = \frac{k}{1 + n + \frac{\mu k}{a} \cdot 2 \pi m (1 + \frac{1}{2} n)}.$$

Or poſant $\varphi = \pi + \frac{\mu k}{n a}$, la plus grande réſulte

$$\zeta = \frac{k}{1 - n + \frac{\mu k}{a} \cdot \pi (2 m + 1) (1 - \frac{1}{2} n)}.$$

Mais puiſque l'excentricité eſt extrêmement petite, & que l'effet ne devient ſenſible que lorſque le nombre m eſt aſſez grand, nous aurons la plus petite diſtance

$$\zeta = \frac{k}{1 + \frac{2 \pi \mu m k}{a} + n (1 + \frac{\pi \mu m k}{a})},$$

& la plus grande diſtance

$$\zeta = \frac{k}{1 + \frac{2 \pi \mu m k}{a} - n (1 + \frac{\pi \mu m k}{a})}.$$

Donc après m révolutions de la planete, nous trouvons le demi-parametre de ſon orbite

$$= \frac{a\,k}{a + 2\pi\mu m k} = k\left(1 - \frac{2\pi\mu m k}{a}\right)$$

& l'excentricité

$$= n.\frac{a + \pi\mu m k}{a + 2\pi\mu m k} = n\left(1 - \frac{\pi\mu m k}{a}\right),$$

d'où nous voyons que la réſiſtance de l'éther diminue tant le parametre que l'excentricité.

XLIII.

Pour trouver le tems pendant lequel la planete acheve m révolutions autour du ſoleil, poſons $\omega = 2\pi m$, ce tems ſera

$$t = \frac{\Theta k \sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\left(m - \frac{3\pi\mu m^2 k}{2a} + \frac{9\mu n k}{4\pi a}\right);$$

Donc le tems de $m + 1$ révolutions étant

$$t = \frac{\Theta k \sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\left(m + 1 - \frac{3\pi\mu(m+1)^2 k}{2a} + \frac{9\mu n k}{4\pi a}\right)$$

après que la planete aura achevé m révolutions, ſon tems périodique ſera $= \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a}(2m+1)\right)$ tout comme nous l'avons trouvé dans le cas précédent. Ainſi une excentricité fort petite ne change rien dans la diminution du tems périodique, & le changement de l'excentricité même eſt ſi petit, qu'il ſera preſque impoſſible de s'en appercevoir, même après le plus grand nombre de révolutions. Car ſi pour la terre la valeur de $\frac{3\pi\mu k}{2a}\Theta$ eſt $\frac{243}{10000}$ prenant μ dix fois plus petit que je l'avois d'abord eſtimé (XXXIX), nous

aurons à-peu-près $\frac{3\pi\mu k}{2a} = \frac{1}{41 \times 31\,558\,176}$, & partant $\frac{\pi\mu k}{a} = \frac{1}{2\,000\,000\,000}$, donc l'excentricité après m révolutions $= (1 - \frac{m}{2\,000\,000\,000})$ d'où l'on voit que même après 100 000 révolutions, cette diminution ne deviendroit pas encore ſenſible. Or le demi-parametre de l'orbite de la terre, après m révolutions, ſera encore $= c\,(1 - \frac{m}{1\,000\,000\,000})$.

III. L'Orbite de la Planete étant conſidérablement excentrique.

XLIV.

Je ſuppoſerai ici l'excentricité n plus grande qu'auparavant, mais pourtant plus petite que l'unité, puiſque $n = 1$ donneroit déja une parabole pour l'orbite de la planete. Les puiſſances de n deviendront donc de plus en plus petites, deſorte qu'on pourra négliger les puiſſances plus hautes que le cube n^3 ou le quarré-quarré n^4. Développons en premier lieu l'intégrale $\int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n\,cof.\,\omega + nn)}}{(1 + n\,cof.\,\omega)^2}$ (§. XXXIV), & puiſque la réſolution en ſéries nous donne $\sqrt{1 + 2n\,cof.\,\omega + nn)} = 1 + \frac{1}{2}nn - \frac{1}{8}n^4 + n\,(1 - \frac{1}{2}nn)\,cof.\,\omega - n\,n\,(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}nn)\,cof.\,\omega^2 + \frac{1}{2}n^3\,cof.\,\omega^3 - \frac{5}{8}n^4\,cof.\,\omega^4$, & $(1 + n\,cof.\,\omega)^{-2} = 1 - 2n\,cof.\,\omega + 3n^2\,cof.\,\omega^2 - 4n^3\,cof.\,\omega + 5n^4\,cof.\,\omega^4$;

nous en obtiendrons $\frac{\sqrt{(1 + 2n\,cof.\,\omega + nn)}}{(1 + n\,cof.\,\omega)^2} = 1 + \frac{1}{2}nn - \frac{1}{8}n^4 - n\,(1 + \frac{3}{2}nn)\,cof.\,\omega + nn\,(\frac{1}{2} + \frac{13}{4}nn)\,cof.\,\omega^2 + \frac{1}{2}n^3\,cof.\,\omega^3 - \frac{17}{8}n^4\,cof.\,\omega^4$;

& à cauſe de $cof.\omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cof. 2\omega$;

$cof.\omega^3 = \frac{3}{4} cof.\omega + \frac{1}{4} cof. 3\omega$;

$cof.\omega^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} cof. 2\omega + \frac{1}{8} cof. 4\omega$;

cette expreſſion ſe réduit à $1 + \frac{3}{4} nn + \frac{45}{64} n^4 - n (1 + \frac{9}{8} nn) cof.\omega + nn (\frac{1}{4} + \frac{9}{16} nn) cof. 2\omega + \frac{1}{8} n^3 cof. 3\omega - \frac{17}{64} n^4 cof. 4\omega$;

d'où nous tirons l'intégrale $\int \frac{d\omega \sqrt{(1 + 2n cof.\omega + nn)}}{(1 + n cof.\omega)^2}$

$= (1 + \frac{3}{4} nn + \frac{49}{64} n^4)\omega - n(1 + \frac{9}{8} nn) ſin.\omega + \frac{1}{2} nn (\frac{1}{4} + \frac{9}{16} nn) ſin 2\omega + \frac{1}{24} n^3 ſin 3\omega - \frac{17}{256} n^4 ſin 4\omega$;

& partant, nous aurons $A = 1 + \frac{3}{4} nn + \frac{45}{64} n^4$; $B = -1 - \frac{9}{8} nn$; $C = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} nn$; $D = \frac{1}{24} E = \frac{-17}{256}$.

XLV.

De-là nous trouvons la diſtance de la planete au ſoleil, comme elle eſt repréſentée au §. XXXVI; c'eſt-à-dire, z égal à k diviſé par

$1 + n cof.\omega + \frac{\mu k}{a} (A\omega - \frac{1}{2} B n\omega cof.\omega - \frac{1}{3} C n^2 ſin. 2\omega - \frac{1}{8} D n^3 ſin. 3\omega - \frac{1}{15} E n^4 ſin. 4\omega)$.

Enſuite, pour l'expreſſion du tems, nous avons d'abord

$\int \frac{d\omega}{(1 + n cof.\omega)^2} = (1 + \frac{3}{2} nn + \frac{15}{8} n^4)\omega - n(2 + 3nn) ſin.\omega + nn (\frac{3}{4} + \frac{5}{4} nn) ſin. 2\omega - \frac{1}{3} n^3 ſin. 3\omega + \frac{5}{32} n^4 ſin. 4\omega$;

& les deux autres formules se réuniſſent dans celle-ci:

$$\frac{\mu k}{2a}\int d\omega \begin{Bmatrix} -3\left(1+\frac{13}{4}nn+\frac{421}{64}n^4\right)\omega+\left(8n+\frac{93}{4}n^3\right)\omega\,cos.\,\omega- \\ \left(\frac{15}{2}n^2+22n^4\right)\omega\,cos.\,2\omega+6n^3\omega\,cos.\,3\omega-\frac{35}{8}n^4\,cos.\,4\omega \\ -\left(n+\frac{9}{4}n^3\right)sin.\,\omega+\left(\frac{31}{24}nn+\frac{763}{48}n^4\right)sin.\,2\omega-\frac{5}{16} \\ n^3\,sin.\,3\omega+\frac{879}{1280}n^4\,sin.\,4\omega \end{Bmatrix}$$

d'où, pour le tems t, on trouve:

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}t = \begin{Bmatrix} \left(1-\frac{3}{2}n^2+\frac{15}{8}n^4\right)\omega-n\left(2+3n^2\right)sin.\,\omega+nn \\ \left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}n^2\right)sin.\,2\omega-\frac{7}{3}n^3\,sin.\,3\omega+\frac{5}{32}n^4\,sin.\,4\omega \\ +\frac{\mu k}{2a}\begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}\left(1+\frac{13}{4}n^2+\frac{421}{64}n^4\right)\omega\omega+\left(8n+\frac{93}{4}n^3\right)\omega\,sin.\,\omega \\ -\left(\frac{15}{4}n^2+11n^4\right)\omega\,sin.\,2\omega+2n^3\omega\,sin.\,3\omega+\frac{35}{32}n^4\omega\,sin.\,4\omega \\ +\left(9n+\frac{51}{2}n^3\right)cos.\,\omega-\left(\frac{121}{48}n^2+\frac{691}{96}n^4\right) \\ cos.\,2\omega+\frac{37}{48}n^3\,cos.\,3\omega-\frac{2279}{5120}n^4\,cos.\,4\omega \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

Et ſi nous nommons le demi-grand-axe $= h$, à cauſe de $h = \frac{k}{1-nn}$, nous aurons:

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta h\sqrt{h}}t = \begin{Bmatrix} \omega-2n\,sin.\,\omega+nn\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}n^2\right)sin.\,2\omega-\frac{7}{3}n^3 \\ sin.\,3\omega+\frac{5}{32}n^4\,sin.\,4\omega \\ -\frac{\mu k}{a}\begin{Bmatrix} +\frac{3}{4}\left(1+\frac{7}{4}n^2+\frac{1333}{64}n^4\right)\omega^2-n\left(4+\frac{45}{8}n^2\right) \\ \omega\,sin.\,\omega+n^2\left(\frac{15}{8}+\frac{43}{16}n^2\right)\omega\,sin.\,2\omega \\ -n^3\,sin.\,3\omega+\frac{35}{64}n^4\omega\,sin.\,4\omega \\ -n\left(\frac{9}{2}+6n^2\right)cos.\,\omega+n^2\left(\frac{121}{96}+\frac{41}{24}n^2\right) \\ cos.\,2\omega-\frac{37}{96}n^3\,cos.\,3\omega+\frac{22279}{10240}n^4\,cos.\,4\omega \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

XLVI.

Suppoſons que la planete ait déja achevé m révolutions, & pour celle qui ſuit poſons $\omega = 2\pi m + \varphi$, alors ſa diſtance au ſoleil ſera γ égal à k diviſé par

$$1+n\,cos.\,\varphi+\frac{\mu k}{a}\left(2\pi Am+A\varphi-\frac{1}{2}Bn(2\pi m+\varphi)\right.$$
$$\left.cos.\,\varphi-\frac{1}{3}Cn^2\,sin.\,2\varphi-\frac{1}{8}Dn^3\,sin.\,3\varphi-\frac{1}{15}En^4\,sin.\,4\varphi\right)$$

& il eſt clair que l'orbite aura ſouffert le même chan-

gement que dans le cas précédent, parce que les termes qui ne renferment point le nombre m sont évanouissans. L'orbite même se rétrécira un tant soit peu, & l'excentricité deviendra plus petite, mais si peu, qu'il est impossible de s'en appercevoir; de même le lieu de l'aphélie ou du périhélie n'en souffrira aussi aucun changement sensible. L'unique effet sensible que la résistance de l'éther est capable de produire, consiste dans la diminution du tems périodique, ce qu'il convient d'examiner plus soigneusement.

XLVII.

Pendant que la planete acheve m révolutions, il s'écoule un tems t, & en posant dans l'expression cidessus (XLV) $\omega = 2\pi m$, ce tems est

$$t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\odot\left(m - \frac{\mu k}{a}\left(\frac{3}{2}\left(1+\frac{3}{4}n^2+\frac{133}{64}n^4\right)\pi m m - \frac{9n}{4\pi}+\frac{121n^2}{192\pi}-\frac{613n^3}{192\pi}+\frac{59317n^4}{61440\pi}\right)\right)$$

Le tems de $m+1$ révolutions se trouvant de la même maniere, après que la planete aura achevé m révolutions, le tems de la révolution suivante est

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\odot\left(1-\frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1+\frac{3}{4}nn+\frac{133}{64}n^4\right)(2m+1)\right),$$

ou bien

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\odot\left(1-\frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1-\frac{1}{4}nn+\frac{85}{64}n^4\right)(2m+1)\right).$$

Et alors le demi-parametre qui fut au commencement k, sera $= k\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)$, l'excentricité $= n\left(1-\frac{\pi\mu mk}{a}\right)$ & le demi-grand-axe $= \frac{k\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)}{1-nn\left(1-\frac{2\pi\mu mk}{a}\right)} = h\left(1-\frac{2\pi\mu mh}{a}\right)$

Que

Que le tems périodique de la planete ait été $= T$, s'il n'y avoit point de réſiſtance ; & à cauſe de $T = \frac{h \sqrt{h}}{c \sqrt{c}} \Theta$, ſi l'on néglige l'excentricité, le tems périodique après m révolutions ſera encore

$$= T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}(2m+1)\right).$$

Or en tenant compte de la réſiſtance, le premier tems périodique étoit $= T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\right)$, donc après m révolutions la diminution du tems périodique ſera $= \frac{3\pi\mu h}{a} m T$.

XLVIII.

Quelque petite que paroiſſe cette diminution, l'effet devient néanmoins très-ſenſible pendant pluſieurs ſiecles. Suppoſons que le tems périodique d'une planete ſoit à-préſent $= T$, le tems périodique de la Terre autour du Soleil étant auſſi à-préſent $= \Theta$, & que pendant m révolutions le tems périodique de la planete diminue de la particule de tems $= m\theta$, nous aurons $\theta = \frac{3\pi\mu h}{a} T$, & partant $\frac{2\pi\mu h}{a} = \frac{\theta}{T}$. Maintenant qu'on calcule des tables du moyen mouvement de cette planete ſelon la maniere ordinaire, comme ſi le tems périodique T demeuroit toujours le même ; & parce qu'au tems T répond le moyen mouvement 2π, on aura pour un an ou pour le tems Θ le moyen mouvement $\frac{2\pi\Theta}{T}$, & pour le tems de N années le moyen mouvement ſera $= \frac{2\pi N\Theta}{T}$. Mais à cauſe de la réſiſtance, le mouvement moyen de la planete pour le même tems de N années ſera différent. Pour le trou-

ver, nous n'avons qu'à poſer $t = N\Theta$, & l'angle ω, en omettant les termes qui renferment le ſinus ou coſinus, donnera ſon mouvement moyen actuel. Or puiſque $\frac{c\sqrt{c}}{h\sqrt{h}} = \frac{\Theta}{T}$, nous avons cette équation :

$$\frac{2\pi N\Theta}{T} = \omega - \frac{3\mu k}{4a}\omega\omega = \omega - \frac{\theta\omega\omega}{4\pi T},$$

d'où nous trouvons le moyen mouvement actuel:

$$\omega = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\theta\omega\omega}{4\pi T} = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\pi NN\Theta\Theta\theta}{T^3}.$$

Il faut donc ajoûter au lieu moyen trouvé par les tables ordinaires du moyen mouvement la particule

$$\frac{\Theta\Theta\theta}{T^3}\pi NN = 180^\circ\, NN.\frac{\Theta\Theta\theta}{T^3}.$$

XLIX.

Cette même correction a lieu, ſoit que N marque un nombre poſitif ou negatif. Donc ſi les tables des moyens mouvemens ont été dreſſées ſur le tems périodique T d'une certaine époque, qui après m révolutions diminue de la particule $m\theta$, alors pour N ans tant avant qu'après cette époque, il faudra ajoûter la particule $180^\circ.N^2.\frac{\Theta^2}{T^2}.\frac{\theta}{T}$ à la longitude moyenne qu'on aura tiré de ces moyens mouvemens. Si l'on fait $T:\theta = 360^\circ:\delta$, ce petit arc δ exprime le moyen mouvement de la planete qui répond au tems θ, & maintenant notre correction de la longitude moyenne ſera $= \frac{1}{2}\delta N^2.\frac{\Theta^2}{T^2}$. où Θ marque le tems d'une année. Donc ſi nous poſons la diſtance moyenne du ſoleil à la terre $= c$ & à la planete $= h$, à cauſe de $\frac{\Theta^2}{T^2} = \frac{c^3}{h^3}$

notre correction ſera $= \frac{1}{2} \delta . N^2 \frac{c^3}{b^3}$; or cette fraction $\frac{c^3}{b^3}$ ſe tire aiſément des tables. Je remarque encore que cette correction eſt proportionnelle au quarré de l'intervalle du tems, & partant dans un intervalle de quelques milliers d'années elle doit devenir très-conſidérable, quelque petite que ſoit la diminution d'une révolution à la ſuivante, que je ſuppoſe ici $= \delta$.

L.

Donc tout l'effet de la réſiſtance de l'éther ſur le mouvement des planetes ſe réduit à la diminution de leurs tems périodiques, puiſque nous avons vu que ni l'excentricité, ni leurs aphélies n'en ſouffrent aucun changement ſenſible. Or pour l'uſage de l'Aſtronomie cet effet ne ſauroit être repréſenté plus commodément que par une correction du mouvement moyen qui doit ſe faire ainſi. Ayant établi le mouvement moyen pour une certaine époque & en ayant déduit une table des longitudes moyennes pour tous les ans tant avant qu'après cette époque, la longitude moyenne ne ſera juſte que pour cette époque même ; pour tout autre tems qui en differe de N' ans tant avant qu'après cette époque, il faudra ajoûter à la longitude moyenne tabulaire la particule $\frac{1}{2} \delta . N^2 . \frac{c^3}{b^3} = \frac{1}{2} \delta . N^2 . \frac{\Theta^2}{T^2}$. La correction d'un an ſera donc $= \frac{1}{2} \delta . \frac{\Theta^2}{T^2}$, ſoit cette correction $= \alpha$, & puiſque $\delta = 2 \alpha \frac{T^2}{\Theta^2}$, nous aurons $\theta = \frac{\alpha}{\pi} . \frac{T^3}{\Theta^2}$, & partant, $\frac{3 \pi \mu h}{a} = \frac{\alpha}{\pi} . \frac{T^2}{\Theta^2}$, ou bien $\alpha = \frac{3 \pi^2 \mu h}{a} . \frac{\Theta^2}{T^2}$ $= 3 \pi^2 \mu . \frac{c^3}{a b b}$; de ſorte que la correction pour un an ſoit réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance moyenne de la planete au ſoleil multi-

plié par le demi-diametre du corps de la planete.

LI.

Il ſuffit donc d'avoir déterminé cette correction pour une planete, & il ſera aiſé d'en déduire celles de toutes les autres planetes. Il n'y a aucun doute que les obſervations du ſoleil ne ſoient les plus propres pour nous fournir les éclairciſſemens néceſſaires ſur cet important article, & ſi l'on peut parvenir à déterminer la correction d'un an α pour le ſoleil, on en déduira aiſément la valeur de la fraction μ réſultante de la réſiſtance de l'éther, car à cauſe de $h = c$, on aura $\mu = \frac{\alpha a}{3\pi\pi c}$. Mais quoique la correction d'un an α ſoit ſi petite, qu'elle échapperoit aux plus grands ſoins des Aſtronomes, elle devient très-ſenſible pour un grand nombre d'années, parce que pour un intervalle d'N années elle ſera $= NN\alpha$, & partant pour un ſiecle $= 10\,000.\,\alpha$, & pour dix ſiecles $= 1\,000\,000.\,\alpha$. En conſultant donc les plus anciennes obſervations, il ne ſera plus difficile d'en conclure la véritable valeur de la correction annuelle α.

LII.

Pour cet effet, il faudroit conclure la quantité d'une année ſolaire moyenne par les plus modernes obſervations faites tout au plus dans l'eſpace d'un demi-ſiecle; de-là on devroit dreſſer des tables du moyen mouvement & de la longitude moyenne du ſoleil pour des époques les plus reculées, où l'on trouve de bonnes obſervations. Alors pour une telle époque, qui précede la préſente de N ans, on compareroit la longitude moyennes tirée de ces tables avec celle qui conviendroit aux obſervations anciennes, & ſi l'on trou-

voit que celle-ci surpassoit celle-là de la quantité Q, on auroit $NN\alpha = Q$, & partant $\alpha = \frac{NN}{Q}$. Mais il faudroit être bien assuré que la terre n'eût pendant ce tems souffert aucune altération dans son mouvement par l'action de quelque comete. A l'égard de l'action des autres planetes, on en connoît assez l'effet, pour en tenir compte dans cette recherche; mais il est fort à craindre que les cometes ne la rendent tout-à-fait inutiles.

LIII.

La méthode dont les Astronomes se servent pour déterminer la quantité de l'année solaire, nous fournit encore un autre moyen de nous assurer de la correction annuelle α. Supposons qu'en comparant les observations présentes avec des observations faites avant L ans, on conclue la quantité de l'année $= A$, & qu'en les comparant avec des observations faites avant M ans, on la trouve $= B$. Maintenant soit la quantité de l'année solaire $= \odot$, & la diminution annuelle $= \theta$; & le tems écoulé depuis L ans jusqu'à présent sera $= L\odot + LL\theta$, & le tems écoulé depuis M ans jusqu'à présent $= M\odot + MM\theta$. De-là on aura $A = \odot + L\theta$, & $B = \odot + M\theta$, & partant $\theta = \frac{B-A}{M-L}$ & $\odot = A - L\theta$; d'où l'on connoîtra la véritable année solaire $\odot$, qui convient à l'époque d'à-présent, & la diminution annuelle θ, & de-là on tirera $\alpha = \frac{\pi\theta}{\odot}$.

LIV.

Mais outre les cometes qui peuvent troubler cette détermination, on rencontre encore d'autres obstacles presque insurmontables du côté des observations mê-

mes, qui ne ſont pas ſi exactes, au moins dans les ſieclespaſſés, que l'erreur dans la quantité de l'année ne puiſſe être de pluſieurs ſecondes. Or puiſque $B - A$ eſt un nombre de ſecondes fort peu conſidérable, l'erreur commiſe dans les quantités de l'année A & B le rend tout-à-fait incertain. Enſuite les plus anciennes obſervations ont non ſeulement le défaut qu'elles ſont peu exactes, mais il ſemble auſſi qu'on n'eſt pas trop ſûr du tems dans lequel elles ont été faites. Surtout la réduction de l'Almanac Egyptien au Romain, dont Ptolomée s'eſt ſervi, ne paroît pas aſſez conſtatée, à cauſe des déſordres auxquels l'Almanac Romain fut aſſujetti dans ce tems; & les corrections que Riccioli & d'autres Chronologues ont tâché d'y apporter, ſont ouvertement fondées ſur la quantité de l'année qu'ils ont ſuppoſée; ce qui eſt préciſément la queſtion. Il ſe pourroit donc bien faire que les momens des obſervations marqués par Ptolomée duſſent être reculés d'un ou de deux jours de plus qu'on les ſuppoſe dans le calcul; & alors les anciennes obſervations comparées aux modernes, donneroient inconteſtablement l'année plus longue que les Aſtronomes ne la ſuppoſent dans leurs tables.

LV.

En effet, feu M. Caſſini, après les plus ſcrupuleuſes recherches ſur la quantité de l'année ſolaire moyenne, en prenant un milieu entre tous ſes réſultats, conclut l'année ſolaire moyenne de $365^j, 5^h, 48', 47''$, qui convient avec celle qu'il a déduite de ſes propres obſervations. Cependant, dans ſes tables aſtronomiques, il la ſuppoſe de $365^j, 5^h, 48', 53'', 24'''$, & partant de $6'', 24'''$ plus grande; ſans doute qu'il n'a fait ce changement que pour ſatisfaire aux anciennes obſervations; d'où il faut conclure

que les anciennes obſervations demandent une année plus longue ; ce qui prouve l'effet de la réſiſtance de l'éther. Auſſi ne ſauroit-on douter que les obſervations de Hipparque, comparées avec celles de Ptolomée, ne donnaſſent l'année au moins de quelques minutes plus longue ; d'où il ſuit encore, que l'année ſolaire moyenne eſt à-préſent plus courte qu'autrefois.

LVI.

Si M. Caſſini, dans ſes Tables, avoit ſuppoſé l'année de $365^j, 5^h, 48', 47''$, le mouvement moyen pour cent années Juliennes ſeroit devenu $0^s, 0°, 46', 3''$, qui eſt dans ſes Tables de $0^s, 0°, 45' 42''$, la différence étant de $21''$. Donc pour 200 ans la différence ſeroit $42''$, & partant, ſi nous ſuppoſons que les Tables de Caſſini repréſentent bien la longitude du ſoleil juſqu'à 200 ans en arriere, des tables conſtruites ſur la quantité de l'année de $365^j, 5^h, 48', 47''$ demanderont, pour l'intervalle de deux ſiecles, la correction de $42''$, & pour l'intervalle d'un ſiecle $10\frac{1}{2}''$. Si nous ſuppoſions la véritable quantité de l'année de $365^j, 5^h, 48', 46''$, on trouveroit, pour l'intervalle d'un ſiecle, la correction $= 12''$, & partant 10000 $\alpha = 12''$, & $\alpha = \frac{1}{833}'' = \frac{\theta}{\odot}. 180° = \frac{\theta. 60 \times 60 \times 180}{31\,558\,176}$; d'où $\theta = \frac{31\,558 \times 176}{833 \times 60 \times 60 \times 180}'' = 0, 058''$, ce qui eſt la diminution annuelle de l'année, & partant la diminution ſéculaire $= 5'', 48'''$.

LVII.

M. l'Abbé de la Caille ayant ſuppoſé l'année, dans ſes Tables, de $365^j, 5^h, 48', 49''$, qu'il a uniquement conclu des obſervations modernes, de maniere que ce doit être la juſte quantité de l'année pour le milieu de

ce ſiecle, le mouvement moyen pour 100 années Juliennes eſt $0^s, 0^\circ, 45', 55'' \frac{6}{10}$; donc ſi, pour ſatisfaire aux obſervations faites avant deux ſiecles, il falloit ſuppoſer le mouvement moyen ſéculaire de $0^s, 0^\circ, 45', 42''$, il faudroit ajoûter à la longitude trouvée par les Tables de M. de la Caille $27 \frac{2}{10}'' = 40\,000\,\alpha$, & partant α ſeroit $= \frac{1}{14700}''$, d'où l'on trouveroit $\theta = 0,033$, & la diminution ſéculaire de l'année $= 3'', 18'''$, d'où il ſemble qu'on devroit ſuppoſer la fraction $\mu = \frac{1}{150\,000\,000\,000\,000}$; ce qu'on pourroit encore aſſez bien accorder avec les principes établis ci-deſſus ſur la denſité de l'éther, & ſur la maniere dont il réſiſte au mouvement des corps.

LVIII.

Comme on ne ſauroit encore rien décider de précis là-deſſus, poſons la diminution ſéculaire de l'année $= v''$ & à cauſe de $\theta = \frac{v}{100}$, nous aurons:

$$\alpha = 180^\circ . \frac{v}{100 \times 31\,558\,176} = 0,000\,205\,v'',$$

donc l'augmentation de la longitude moyenne pour l'intervalle d'un ſiecle ſera $= 2 \frac{1}{20} v$ ſecondes, & pour l'intervalle de 10 ſiecles ou de 1000 ans, elle ſera $= 205\,v$ ſecondes, & de-là $\mu = \frac{v}{536\,000\,000\,000\,000}$.

De-là, en tenant compte du demi-diametre des autres planetes, on aura l'augmentation de leur longitude moyenne pour l'intervalle de 1000 ans,

Pour Saturne	$= 135\,v''$;	Pour la Terre	$= 205\,v''$;
Pour Jupiter	$= 62\,v''$;	Pour Vénus	$= 103\,v''$;
Pour Mars	$= 254\,v''$;	Pour Mercure	$= 135\,v''$;

après

après avoir établi des tables du moyen mouvement sur le tems périodique qui convient à chaque planete pour l'époque proposée.

LIX.

Ce que je viens d'exposer, prouve suffisamment, que les planetes éprouvent dans leur mouvement quelque résistance de l'Ether, quoiqu'il soit impossible d'en déterminer la vraie quantité par la seule Théorie, moyennant laquelle nous venons cependant d'apprendre que cette résistance est très-petite, & rien n'empêche qu'elle ne soit encore considérablement plus petite que je ne l'ai estimée. Nonseulement la densité de l'Ether pourroit être diminuée au-delà, en diminuant en même raison son élasticité; maisl 'obliquité sous laquelle les particules vraiment solides des planetes reçoivent l'impulsion de l'Ether, pourroit causer encore une plus grande diminution. Cependant je doute fort qu'on puisse par ce moyen réduire la diminution de l'année solaire pendant un siecle au-dessous d'une seconde; il me semble plutôt qu'on la pourroit bien admettre de quelques secondes, sans porter la moindre atteinte aux observations anciennes. Il n'est pas encore suffisamment prouvé, que les observations rapportées par Ptolomée, ne doivent être reculées d'un jour au-delà de ce qu'on les suppose communément; Riccioli lui-même en marque le jour différemment dans son Almageste & dans son Astronomie réformée, à cause de l'incertitude de l'Almanac Romain, & ceux qui ont voulu mieux regler ces tems, se sont ouvertement fondés sur l'hypothèse de la quantité inaltérable de l'année.

LX.

Mais ici je rencontre un Antagoniſte bien redoutable, le ſavant M. Meyer, Profeſſeur de Gottingue, qui ſoutient poſitivement que l'année ſolaire n'a ſouffert aucune altération, quoiqu'il admette une petite altération dans le mouvement moyen de la lune, ce qui paroît déja fort paradoxe. Pour maintenir ce ſentiment, il rejette les obſervations des équinoxes de Ptolomée, qui le renverſeroient tout-à-fait; & enſuite il regarde le ſoupçon, qu'on auroit pu commettre une erreur d'un jour dans le calcul chronologique, comme très-abſurde. Il dit que la différence d'un jour produiroit dans le mouvement moyen de la lune une différence de 13 degrés, qu'on ne ſauroit admettre en aucune façon. Mais cette différence ſuppoſe déja un mouvement moyen bien établi & conſtant; ce qui eſt préciſément de quoi on a raiſon de douter. Enſuite, ſi en reculant d'un jour les époques de Ptolomée, on en change conformément le moyen mouvement du ſoleil & de la lune. On conſervera préciſément les mêmes éclipſes & toujours le même rapport entre le ſoleil & la lune. Outre cela, il n'eſt pas à craindre que cette augmentation du moyen mouvement ne ſoit plus d'accord avec les obſervations plus modernes; le mouvement moyen de ces derniers ſiecles n'en eſt point altéré; mais en remontant aux ſiecles paſſés, il y faut apporter une correction proportionnelle au quarré du tems écoulé; d'où l'on voit, que quand même cette correction pour les tems de Ptolomée & Hipparque ſeroit très-conſidérable, elle pourroit bien ſubſiſter avec les obſervations faites depuis quelques ſiecles, même en remontant juſqu'aux tems d'Albategnius.

FIN.